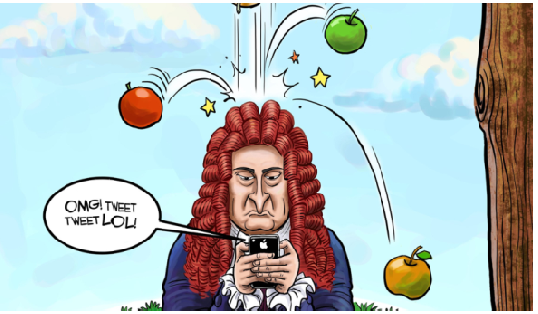
Friedrich-Schiller-Universität Jena
seit 1558

Gravitation

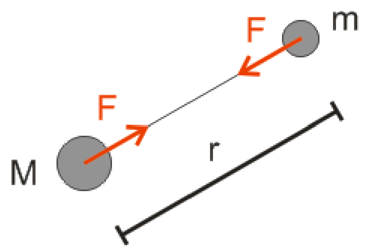
Technische Mechanik II

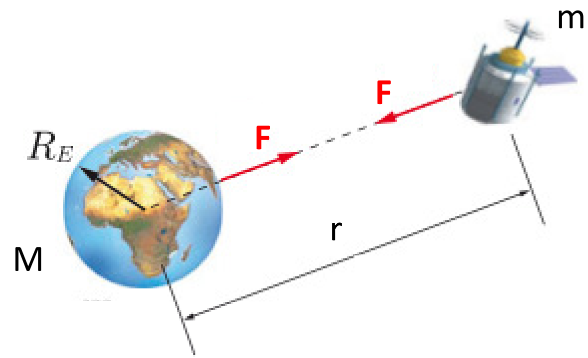
Prof. Dr. Enrico Gnecco



Gravitationsgesetz, Planeten- und Satellitenbewegung

- Kraft, die zwei beliebige Massen m und M aufeinander ausübt:





$$\boxed{F = -G\frac{Mm}{r^2}}$$

$$G = 6.673\times10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\,s^2}$$

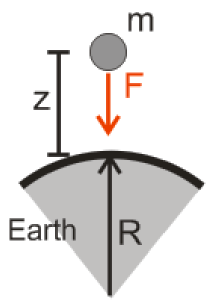
- Potential:

$$\boxed{U = -G\frac{Mm}{r}} \leftarrow U = -\int F\,dr$$

Gravitationsgesetz, Planeten- und Satellitenbewegung

- In der Nähe der Erdoberfläche:

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \rightarrow G = \frac{gR^2}{M}$$

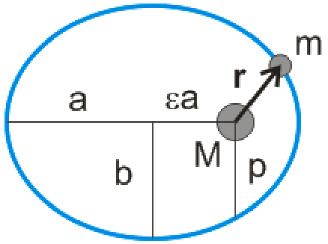


$$U = -G\frac{Mm}{r}\bigg|_{R}^{R+z} = mgz\frac{R}{R+z}$$

$$z << R \rightarrow \boxed{U \approx mgz}$$

Gravitationsgesetz, Planeten- und Satellitenbewegung

- Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt (Abstand e vom Mittelpunkt) die Sonne steht (**1. Keplersche Gesetz**):



$$\boxed{r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}}$$

Beweis:

- Radiale Richtung:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -G\frac{mM}{r^2}$$

- 2. Keplersche Gesetz:

$$r^2\dot{\varphi} = C$$

$$u \equiv \frac{1}{r} \rightarrow \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{C^2}$$

Gravitationsgesetz, Planeten- und Satellitenbewegung

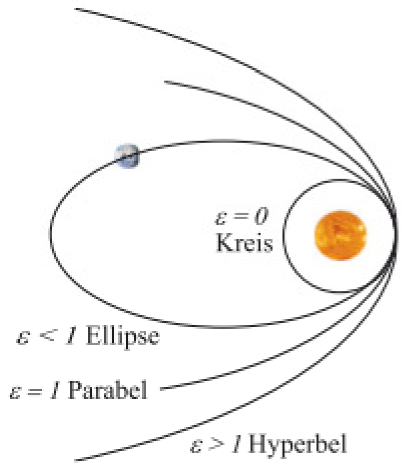
- Allgemeine Lösung:

$$u = B\cos(\varphi - \alpha) + \frac{GM}{C^2} \rightarrow r = \ldots$$

mit

$$p = \frac{C^2}{GM}, \quad \varepsilon = \frac{BC^2}{GM}$$

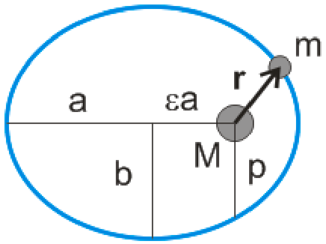
- Für $\varepsilon < 1$: Ellipse (für $\varepsilon > 1$: Hyperbel)



Gravitationsgesetz, Planeten- und Satellitenbewegung

- Die Quadrate der Umlaufzeiten T der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Umlaufbahnen (**3. Keplersche Gesetz**):

$$\boxed{T^2 = \frac{(2\pi)^2 a^3}{GM}}$$

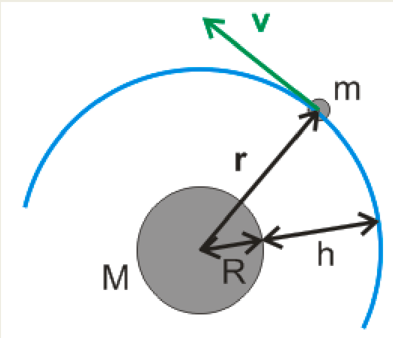


Beweis:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{GM} \\ A &= \pi a b = \frac{C}{2} T \end{aligned}\right| \rightarrow T = \ldots$$

Gravitationsgesetz, Planeten- und Satellitenbewegung

- Beispiel 1.16: En Satellit m wird in eine Kreisbahn im Abstand h von der Erdoberfläche gebracht.
- Welche Energie ist mindestens erforderlich um das zu tun?



Kreisbewegung $\rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} m\frac{v^2}{r} &= G\frac{Mm}{r^2} \\ r &= R+h \end{aligned} \right| \rightarrow v^2 = G\frac{M}{R+h} = \frac{gR^2}{R+h}$$

Energiesatz $\rightarrow$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R+h} \rightarrow E_{kin,0} = gm\frac{R(R+2h)}{R+h}$$